Représentation matricielle des applications linéaires

deux semaines 1/2

Table des matières

ECUE concerné **2**

Motivation **2**

Attendus **2**

1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base **2**
1.1 Résumé . . . 2
1.2 Exercices . . . 3
Exercice 1.1 . . . 3
Exercice 1.2 . . . 3
Exercice 1.3 . . . 3
Exercice 1.4 . . . 3
Exercice 1.5 . . . 4

2 Matrice d'une application linéaire dans des bases données **4**
2.1 Résumé . . . 4
2.2 MiMos à travailler . . . 4
2.3 Exercices . . . 4
Exercice 2.6 . . . 4
Exercice 2.7 . . . 5
Exercice 2.8 . . . 6
Exercice 2.9 . . . 6
Exercice 2.10 . . . 6
★ Exercice 2.11 . . . 7

3 *Les* matrices d'une application linéaire **7**
3.1 Résumé . . . 7
3.2 MiMos à travailler . . . 7
3.3 Exercices . . . 7
Exercice 3.12 . . . 7
Exercice 3.13 . . . 8
★ Exercice 3.14 . . . 8

ECUE concerné

Cette feuille de TD concerne le second chapitre constituant l'ECUE ALM : applications linéaires et matrices. Elle fait partie du B4.

Les **prérequis** sont :

— l'ECUE S1B1 OBM pour les parties « Logique, ensembles, fonctions »
— l'ECUE S2B3-B4 EV : espaces vectoriels

Motivation

On a déjà avancé lors des fiches de TD précédentes que l'algèbre linéaire propose des modèles d'utilité notoire dans l'analyse des différents problèmes d'ingénierie informatique. Cette promesse ne ferait sens si l'on n'était pas en mesure de stocker, d'une manière ou d'une autre, l'information portée par une application linéaire en machine. On sous-entend donc qu'on serait en mesure de réduire l'information portée par une application linéaire à une information de taille finie. Pouvoir effectuer ce type de réduction en dimension infinie n'est pas possible en général, ou du moins en dehors de certains contextes que vous aurez l'occasion d'étudier, comme par exemple en mathématiques du signal. En ***dimension finie***, cependant, cette réduction est toujours possible. On peut donc dans ce cas, stocker l'ensemble de l'information que porte une application linéaire f dans un tableau de valeurs. On a autant de manière de faire cette réduction que de bases dans les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de f, en général une infinité. On étudie dans cette fiche comment penser ces différentes réductions et les rapports qui les lient.

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de :

— Manipuler des opérations sur les matrices (addition, multiplication, inverse).
— Naviguer entre une application linéaire et sa représentation matricielle.
— Déterminer et utiliser une matrice de passage d'une base à une autre.

Plus en détails, vous devez être capables de :

— Additionner, multiplier des matrices.
— Inverser une matrice 3×3.
— Déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données.
— Utiliser la matrice d'une application linéaire pour calculer l'image d'un vecteur.
— Analyser une application linéaire au moyen d'une de ses matrices.
— Déterminer une matrice de passage d'une base dans une autre.
— Relier les coordonnées d'un vecteur dans deux bases à l'aide d'une matrice de passage.

Convention 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $e_1, \dots, e_n$ les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Précisément pour $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est l'élément ayant toutes ses coordonnées à 0 sauf la i-ème qui est à 1.

1 Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base

1.1 Résumé

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Pour connaître les valeurs que prend une application linéaire $f : E \to F$ en ***tout*** élément de E il faut et il suffit de connaître les valeurs que prend cette application linéaire sur ***une*** quelconque base de E. Cette section est consacrée à travailler ce seul point.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (2, 1) \\ f(e_2) &= (-1, 1) \\ f(e_3) &= (1, 7). \end{aligned}$$

1. Est-ce que f peut prendre la valeur $(3, 1)$ en $(1, -1, 0)$?
2. Quelle est la valeur que prend f en $(1, 2, 3)$?
3. Plus généralement quelle valeur prend f en un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en fonction des coordonnées x, y et z ?

Exercice 1.2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que

$$\begin{aligned} f\big((0, 1, 1)\big) &= (2, 1) \\ f\big((0, 1, 0)\big) &= (-1, 1) \\ f\big((0, -1, 1)\big) &= (4, -1). \end{aligned}$$

1. Quelle est la valeur que prend f en $(0, 1, 2)$?
2. Quelle est la valeur que prend f en $(1, 0, 2)$? Quel est le soucis ?

Exercice 1.3

Lors d'une de vos séances de TD, votre enseignant vous décrit une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\begin{aligned} f\big((1, 2, 1)\big) &= (1, 1, 1) \\ f\big((-1, 1, 1)\big) &= (-1, 1, 1) \\ f\big((0, 3, 2)\big) &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Pourquoi a-t-il fait une *erreur de typo* ?

Exercice 1.4

1. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev, f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose de plus que E est de dimension finie et on note $\mathcal{B}$ une base de E.
   (a) Que signifie $f = g$?
   (b) Montrer que $f = g$ si et seulement si $\forall\, u \in \mathcal{B}, f(u) = g(u)$

2. Soient F un $\mathbb{R}$-ev et $(f, g) \in \big(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, F)\big)^2$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$.
   On suppose que $\forall\, (u, v) \in A^2$, $f(u) = g(u)$. A-t-on $f = g$ (sur $\mathbb{R}^2$) dans les cas suivants ?
   (a) $A = \mathbb{N}^2$
   (b) A est le disque de rayon 1, centré en l'origine
   (c) A est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$
   (d) A est la droite affine $y = 2x + 1$

Exercice 1.5

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(e_1) = (2,3)$ et $f(e_2) = (-1,5)$ où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $f((x,y))$?
   (b) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Calculer AU. Que remarquez-vous ?
2. Soient $u_1 = (1,-1)$ et $u_2 = (1,0)$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(u_1) = (2,3)$ et $f(u_2) = (-1,5)$.
   (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on calculer $f((x,y))$? Si oui, le calculer.
   (b) À quel produit matriciel cela correspond-il ?

2 Matrice d'une application linéaire dans des bases données

2.1 Résumé

La section précédente nous a permis de constater que l'ensemble de l'information portée par une application linéaire peut être représentée par les valeurs que prend cette application linéaire sur une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de départ. Dans le cas d'espaces vectoriels au départ et à l'arrivée qui sont de dimensions finies, et pour peu qu'on choisisse également une base de l'espace vectoriel d'arrivée on peut représenter une application linéaire par un tableau à 2 dimensions : si $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et si $B = (b_i)_{i=1}^p$ et $C = (c_j)_{j=1}^n$ sont respectivement des bases de E et F alors toute l'information de f est contenue dans le tableau des coefficients des $f(b_i)$ dans la base c_j. Ce tableau 2 dimensionnel dépend du choix de bases au départ et à l'arrivée, il changera si on fait différents choix de bases. On l'appelle ***matrice de f dans les bases B et C***.

Associer à une application f en dimension finie une matrice dans des bases données n'est pas uniquement une manière de *stocker* l'information portée par f, on peut en réalité s'abstraire complétement de f pour ne travailler qu'avec sa matrice. On pourrait résumer la majeure partie des problématiques d'algèbre linéaire à celle-ci : ***comment choisir la base adaptée à l'application linéaire qu'on étudie ?***

Hypothèse 2.1. On se limite dans la suite au cas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.

2.2 MiMos à travailler

Mimo : Définition d'une matrice
Mimo : Multiplication de matrices
Mimo : Matrice d'une application linéaire

2.3 Exercices

Exercice 2.6

Décrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases indiquées :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{cases}$
   (a) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée,
   (b) dans la base canonique au départ et $((1,1),(1,-1))$ à l'arrivée,
   (c) dans la base $((1,1),(1,-1))$ au départ et la base canonique à l'arrivée,
   (d) dans la base $((1,-1),(1,1))$ au départ et la base canonique à l'arrivée,
   (e) dans la base $((1,1),(1,-1))$ au départ et $((0,1),(1,1))$ à l'arrivée.

2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-y+z, y-2z) \end{cases}$
   (a) dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$,
   (b) dans la base $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ et la base $((1,-1),(1,1))$ à l'arrivée.

3. ***(Travail personnel)*** $h : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & x-2y+3t \end{cases}$
   (a) dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée,
   (b) dans la base canonique au départ et la base (2) à l'arrivée.

★ 4. $\ell : \begin{cases} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{cases}$ où les a_{ij} sont des réels.
   dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

5. $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$.
   (a) dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ au départ et à l'arrivée,
   (b) dans la base $(1, X+1, X^2-1, X^3+X)$ au départ et la base canonique à l'arrivée,
   (c) dans la base canonique au départ et la base $(1, X+1, X^2-1, X^3+X)$ à l'arrivée.

Exercice 2.7

On rappelle la proposition, que vous devez connaitre et savoir démontrer :

Proposition à connaitre par cœur :

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$$

où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f(u))$ est la matrice colonne formée des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}_2$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ au départ et $\mathcal{B}_2$ à l'arrivée et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}_1$.

Considérons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

1. À quelle application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (avec n et p à déterminer) la matrice A est-elle associée dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée ?
2. À quelle application linéaire $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_p[X])$ (avec n et p à déterminer) la matrice A est-elle associée dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée ?
3. Supposons que A soit la matrice de l'application linéaire $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dans la base $(u_1 = (1,1), u_2 = (1,-1))$ au départ et la base canonique à l'arrivée. Quelle est l'image de $u = (3,1)$ par h ?
4. Supposons que A soit la matrice de l'application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ dans la base $((1,2),(3,4))$ au départ et la base $(P_1 = 1, P_2 = X+1, P_3 = (X-1)^2)$ à l'arrivée. Soit $u = (4,6)$.
   Trouver a, b et c réels tels que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 2.8

On considère les applications linéaires :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-2x+4y, x-y) \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z+x, 2z+3x-y) \end{cases}$$

On note respectivement M_f et M_g les matrices de f et g dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

1. Donner M_f et M_g. Peut-on faire $M_f \times M_g$ et/ou $M_g \times M_f$? Si oui, effectuer le(s) produit(s) matriciel(s).
2. Peut-on faire $f \circ g$ et/ou $g \circ f$? Si oui, en trouver son expression. En déduire la matrice M associée dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.
3. Faire le lien matriciel entre M, M_f et M_g.

Exercice 2.9

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et id_E l'application identité de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
   (a) Quelle est la matrice I_n de id_E dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée ?
   (b) Soit f un endomorphisme de E. On note A sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée. Calculer, pour tout $u \in E$, $f \circ \mathrm{id}_E(u)$ et $\mathrm{id}_E \circ f(u)$. En déduire $f \circ \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{id}_E \circ f$ et faire le lien matriciel entre A et I_n.
2. **(Travail personnel)** Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ associées respectivement aux matrices A, B et C dans les bases canoniques.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

   (a) Identifier les compositions possibles entre f, g et h : $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, $g \circ h$, $h \circ g$, $h \circ f$, $f \circ h$, $h \circ h$?
   (b) Calculer les matrices correspondant à ces applications.

Exercice 2.10

Définition :

- *Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{R}$-espace vectoriel F. On appelle rang de f, noté $Rg(f)$ la dimension de l'image de f : $Rg(f) = dim\,(Im(f))$.*
- *De plus, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle rang de A, noté $Rg(A)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses colonnes.*

Par la suite, on notera $0_{n,1}$ pour $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

1. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathcal{B}'$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(e_1), \ldots, f(e_p))$.
   (b) Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$. Vérifier que

$$\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_p f(e_p) = 0_F \iff \alpha_1 \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_1)) + \ldots + \alpha_n \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e_p)) = 0_{n,1}$$

   (c) En déduire que $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(A)$.
   (d) Supposons qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha C_p = 0_{n,1}$. Montrer que

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_p e_p \in \mathrm{Ker}(f)$$

2. Soit f l'application linéaire associée à la matrice A suivante dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et à l'arrivée : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver le rang, l'image et le noyau de f.
3. Reprendre la même démarche, pour les applications linéaires $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$ et $i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ associées aux matrices B, C et D dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée :
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

★ 4. Répondre aux mêmes questions pour l'application linéaire ℓ dont la matrice dans la base $((1,1),(1,-1))$ au départ et à l'arrivée est :
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

★ **Exercice 2.11**

On considère les applications linéaires f et g dont les matrices dans les bases canoniques sont respectivement
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Quelle est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ dans les bases canoniques ? Celle de $g \circ f$?
2. Calculer la matrice de la composée de g avec elle-même 10 fois, g^{10}, dans les bases canoniques.
3. Écrire les matrices de f et g respectivement dans la base $((1,1),(1,-1))$ au départ et à l'arrivée.
4. Exprimer g^k et f^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3 *Les* matrices d'une application linéaire

3.1 Résumé

À toute application linéaire f entre deux espaces vectoriels de dimensions finies, on peut associer une représentation matricielle. Cette représentation matricielle dépend du choix de bases des espaces de départ et d'arrivée. On est donc a priori en mesure d'associer différentes matrices à f en effectuant différents choix de bases des espaces de départ et d'arrivée. On étudie cette question plus en détail dans cette section : *comment obtenir toutes les matrices qu'on pourrait associer à une application linéaire ?* Cette question est liée au fait d'être en mesure de changer le système de *coordonnées* dans lequel on travaille, c'est-à -dire la base dans laquelle on travaille.

3.2 MiMos à travailler

Mimo : Définition de l'inverse d'une matrice
Mimo : Calcul de l'inverse d'une matrice

3.3 Exercices

Exercice 3.12

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par
$$f((x,y,z)) = (x + y - 2z,\ x - y + z,\ -2x + y - z)$$
   (a) Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

(b) Soit A la matrice de f et B la matrice de f^{-1} dans la base canonique . Calculer AB et BA. On note A^{-1} la matrice B.

2. On admet que les matrices suivantes sont inversibles. Trouver leur matrice inverse.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.13

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E.

On appelle **matrice de passage** de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ la matrice $n \times n$ dont les colonnes sont formées des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$. On la note $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

1. Expliquer pourquoi toute matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible. À quoi correspond $P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on note $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère une autre base :

$$\mathcal{B}_2 = ((1,0,1),(0,1,0),(1,1,0))$$

(a) Donner la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$. On la notera P pour simplifier.

(b) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}_1$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans $\mathcal{B}_2$.

Exprimer X en fonction de P et de X'. En déduire aussi une expression de X' en fonction de X.

(c) Soit $u = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$. Trouver X et X'.

3. À votre avis, les formules de changement de bases vues dans la question précédente peuvent-elles se généraliser à n'importe quel espace vectoriel de dimension finie ?

★ **Exercice 3.14**

On reprend les notations de l'exercice 2-6 (1.). Pour rappel :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{cases}$$

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathcal{B}' = ((1,1),(1,-1))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

On appelle A la matrice de f dans $\mathcal{B}$. (2-6 (1-a)), B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base $\mathcal{B}$ à l'arrivée (2-6 (1-c)) et C la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base $\mathcal{B}'$ à l'arrivée (2-6 (1-b)).

Notre objectif est de retrouver les matrices de f dans les bases décrites aux points 2-6 (1-b) et (1-c) à partir de la matrice A.

1. Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$?
2. Pour $u \in \mathbb{R}^2$, on note X (resp. X') le vecteur colonne formé des coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et Y (resp. Y') celui formé des coordonnées de $f(u)$ dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$.

Quel est le lien matriciel entre X et X' ? Entre Y et Y' ? Donner les relations matricielles qui relient A, B et C à X et/ou X', Y et/ou Y'.

3. En déduire que $B = AP$ et $C = P^{-1}A$.
4. Notons A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée. En vous servant des questions précédentes montrer que $A' = P^{-1}AP$.